14/03/2019

Μάθημα 5ο

Το διάνυσμα της ταχύτητας σε πολικές:

$$\bar{u} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dots = \dot{r}\cdot\bar{r}_0 + r\dot{\theta}\bar{\theta}_0$$

ενώ το διάνυσμα ταχύτητας στις καρτεσιανές : $\bar{u} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}$

x: μήκος
$\dot{x}$: μήκος ανά μονάδα χρόνου
$\dot{\theta}$: γωνία ανά μονάδα χρόνου
Άρα γι αυτό στις πολικές έχω $r\cdot\theta$, γιατί θέλω μήκος-γωνία ανά μονάδα χρόνου.

$\bar{r}_0 \perp \bar{\theta}_0$, άρα $\dot{r} \perp r\dot{\theta}$, διότι πολλαπλασιάζονται με τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα.

Η ταχύτητα σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\bar{R} = \overline{OP'} + \overline{P'P}$$

παράλληλο στο z-άξονα — το μέτρο · μοναδιαίο

$$\bar{u} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{OP'} + \overline{P'P}) = \frac{d}{dt}(|\bar{r}|\cdot\bar{r}_0 + z\cdot\bar{z}_0) =$$

$$= \frac{d}{dt}(r\cdot\bar{r}_0) + \frac{d}{dt}(z\cdot\bar{z}_0) = \frac{dr}{dt}\bar{r}_0 + r\cdot\frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{dz}{dt}\bar{z}_0 + z\underbrace{\frac{d\bar{z}_0}{dt}}_{0} =$$

$$= \dot{r}\cdot\bar{r}_0 + r\cdot\dot{\bar{r}}_0 + \dot{z}\cdot\bar{z}_0 = \dot{r}\bar{r}_0 + r\cdot\dot{\theta}\cdot\bar{\theta}_0 + \dot{z}\cdot\bar{z}_0$$

Επιτάχυνση:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\bar{r}_0 + r\dot{\theta}\bar{\theta}_0 + \dot{z}\cdot\bar{z}_0) = \dots = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{\theta}_0 + \ddot{z}\bar{z}$$

$$J = \begin{bmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |J| = r$$

Άσκηση 1

Υ.Σ. κινείται στο xy-επίπεδο, έτσι ώστε οι συνιστώσες της θέσης του να πληρούν τις σχέσεις :

$$x(t) = 5t^2, \quad y(t) = 3t$$

Να βρεθεί η τροχιά του Υ.Σ. ως $y = y(x)$.

Λύση

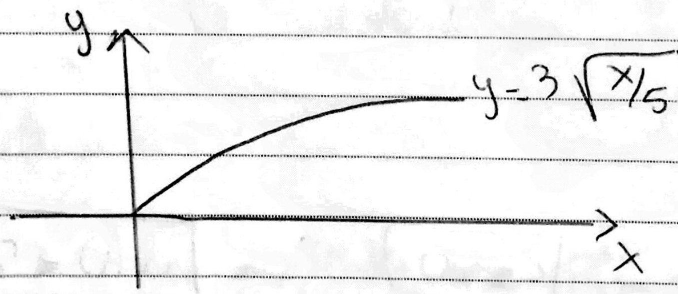
$\vec{r}(t) = 5t^2\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}$

$t = y/3, \quad x = 5\cdot(y/3)^2 = 5\dfrac{y^2}{9} = \dfrac{5}{9}y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = \dfrac{9}{5}x \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{9}{5}x}$

$t \geq 0 \Rightarrow$ δηλ: $t > 0 \Rightarrow y > 0$ άρα $y = \sqrt{\dfrac{9}{5}x} = 3\sqrt{x/5}$

$\Rightarrow y = 3\sqrt{x/5}$



Άσκηση 2

Υ.Σ. κινείται στο xy-επίπεδο με ταχύτητα $\vec{u} = 3\vec{i} + 10t\vec{j}$. Αν $t=0$, βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, να βρεθεί η τροχιά του Υ.Σ. ως $y = y(x)$

Λύση

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 10t\vec{j} = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3 \\ \dot{y} = 10t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 3t + c_1 \\ y(t) = 5t^2 + c_2 \end{cases}$$ (Γενική λύση της δ.ε.)

→ ΣΔΕ, 1ης τάξης, 1ου βαθμού, γραμμική, μη ομογενής

$t=0$, $x=y=0$ (γιατί βρίσκεται στην αρχή των αξόνων)

ΠΑΤ: $\begin{cases} \dot{x} = 3 \\ x=0 \text{ και } t=0 \end{cases} \Rightarrow$ γενική λύση $x(t) = 3t + c_1 \xrightarrow{x=t=0}$

$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

Άρα μερική λύση: $\boxed{x(t) = 3t}$ (1)

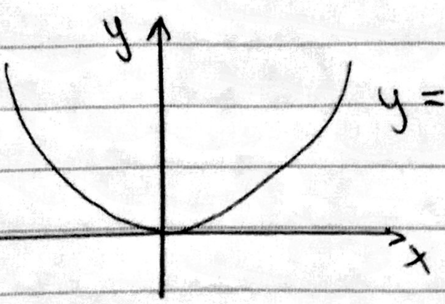
$$\dot{y} = 10t \rightarrow \frac{dy}{dt} = 10t \Rightarrow \int \frac{dy}{dt}\,dt = \int 10t\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = 5t^2 + c_2$$

ΠΑΤ: $\begin{cases} \dot{y} = 10t \\ y=0,\ t=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{c_2 = 0}$ Άρα: $\boxed{y(t) = 5t^2}$ (2)

(1) $\Rightarrow t = x/3$

(2) $\Rightarrow y = 5\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}x^2 \Rightarrow y(x) = \frac{5}{9}x^2$, παραβολή



$y = \frac{5}{9}x^2$ τροχιά Υ.Σ.

Άσκηση 3

Υ.Σ. κινείται στο επίπεδο xy. Η ταχύτητά του σε πολικές είναι: $\bar{u} = 4r^2\theta \cdot \bar{r}_0 + 8r^3\bar{\theta}_0$

Να βρεθεί η τροχιά του Υ.Σ. ως $r=r(\theta)$, όταν $r=3$, $\theta=\pi/8$

Λύση

$$u_r = \dot{r} = 4r^2\theta \quad , \quad u_\theta = r\dot{\theta} = 8r^3 \Rightarrow \dot{\theta} = 8r^2$$

$$\begin{cases} \dot{r} = 4r^2\theta \\ \dot{\theta} = 8r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dr/dt = dr/d\theta \cdot d\theta/dt = 4r^2\theta \\ \dot{\theta} = 8r^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = 4r^2\theta \\ \dot{\theta} = 8r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{d\theta} 8r^2 = 4r^2\theta \\ \dot{\theta} = 8r^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\frac{dr}{d\theta} = \theta \\ \dot{\theta} = 8r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{d\theta} \cdot 8r^2 = 4r^2\theta \\ \dot{\theta} = 8r^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\frac{dr}{d\theta} = \theta \\ \dot{\theta} = 8r^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{χωρίζοντας μεταβλητές}} 2\,dr = \theta\,d\theta \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω}}$$

$$\Rightarrow 2\int dr = \int \theta\,d\theta \Rightarrow \frac{\theta^2}{2} = 2r + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{\theta^2}{4} + \tilde{c}}$$ γενική λύση.

$$r(\pi/8) = 3 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + \tilde{c} = 3 \Rightarrow \dots \Rightarrow \tilde{c} = 3 - \frac{\pi^2}{256}$$

Άρα: $\boxed{r(\theta) = \frac{\theta^2}{4} + 3 - \frac{\pi^2}{256}}$